Álgebra Linear e Geometria Analítica

Aplicações Lineares

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Aplicação linear

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais reais.

Uma aplicação linear (ou transformação linear) de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é uma função

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & \mathcal{V} & \rightarrow & \mathcal{W} \\ & X & \mapsto & \phi(X) \end{array}$$

tal que

1. $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{V};$
2. $\phi(c\,X) = c\,\phi(X), \quad \forall\, c \in \mathbb{R}, \quad \forall\, X \in \mathcal{V}.$

Se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, então ϕ diz-se um operador linear (ou endomorfismo) de $\mathcal{V}$.

Exemplos de aplicações lineares

1. Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação ao eixo dos xx é dada pelo operador linear

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned}$$

2. A rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos zz de ângulo θ é o operador linear

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta), z) \end{aligned}$$

3. A derivada de polinómios (funções deriváveis) é a aplicação linear

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{P}_n &\to \mathcal{P}_{n-1} \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

4. A primitiva (nula em a) de um polinómio é obtida pela aplicação linear

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{P}_n &\to \mathcal{P}_{n+1} \\ p(x) &\mapsto \int_a^x p(t)\,dt \end{aligned}$$

Propriedades e caraterização de uma aplicação linear

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- $\phi(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.
- ϕ é uma aplicação linear se e só se

$$\phi\left(c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k\right) = c_1 \phi(X_1) + \cdots + c_k \phi(X_k),$$

  para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, com $k \geq 2$.

Corolário: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Então, ϕ é completamente determinada por $\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)$.

Exemplo 1

Determinar a aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, com $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, sabendo que

$$\phi(1,1) = (2,3,1) \;\text{ e }\; \phi(1,0) = (1,2,1).$$

- $(1,1)$ e $(1,0)$ são l.i. e, portanto, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \big((1,1),(1,0)\big)$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- $\phi\big(c_1(1,1) + c_2(1,0)\big) = c_1\phi(1,1) + c_2\phi(1,0)$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- se $(x_1, x_2) = c_1(1,1) + c_2(1,0) = (c_1 + c_2, c_1)$, então

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ \phantom{c_1 + {}} c_1 = x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = x_2 \\ c_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= x_2\phi(1,1) + (x_1 - x_2)\phi(1,0) \\ &= x_2(2,3,1) + (x_1 - x_2)(1,2,1) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1). \end{aligned}$$

Aplicações lineares e vetores de coordenadas

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $X \in \mathcal{V}$ e $\phi(X) \in \mathcal{W}$,
$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$.

Qual a relação entre os vetores de coordenadas $[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$ e $[\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$?

$$
\begin{array}{rrcl}
[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Longrightarrow & X & = & a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \\
\Longrightarrow & \phi(X) & = & a_1 \phi(X_1) + \cdots + a_n \phi(X_n) \\
\Longrightarrow & [\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & = & a_1 [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} + \cdots + a_n [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \\
\Longrightarrow & [\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \end{bmatrix}}_{M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}}
\end{array}
$$

Matriz representativa de uma aplicação linear

Teorema: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\boxed{[\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}}$$

onde

$$\boxed{M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}) = \begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \end{bmatrix}}$$

é a matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$.

As colunas desta matriz são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ das imagens dos vetores da base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$.

Exemplo 2

Determinar a matriz da aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ do exemplo 1 relativa às bases $\mathcal{B}_\mathcal{V}$ de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$.

Pela definição,

$$M(\phi, \mathcal{B}_\mathcal{V}, \mathcal{B}_\mathcal{W}) = \left[[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \; [\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \right].$$

Basta calcular

$$[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \iff (2,3,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1),$$

$$[\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \iff (1,2,1) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(0,1,1).$$

Obtêm-se os sistemas $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ \beta_1 + \beta_3 = 1 \end{cases}$

que se podem resolver em simultâneo utilizando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow M(\phi, \mathcal{B}_\mathcal{V}, \mathcal{B}_\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinação de uma matriz representativa

Método para a determinação de uma matriz representativa de $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Sejam

$\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, com $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$

$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$,

$\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma base de $\mathcal{W}$ e

$\mathcal{C}_m$ a base canónica de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$.

Então,

$$\left[M(\mathcal{B}_{\mathcal{W}}, \mathcal{C}_m) \middle| M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{C}_m)\right] = \left[Y_1 \cdots Y_m \middle| \phi(X_1) \cdots \phi(X_n)\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{método de eliminação de Gauss-Jordan}}}{\sim} \left[I_m \middle| M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})\right]$$

Mudança das bases da matriz de uma aplicação linear

As matrizes da aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ relativas às bases $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ e, respetivamente, às bases $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$, satisfazem

$$\boxed{M(\phi, \mathcal{T}_{\mathcal{V}}, T_{\mathcal{W}}) = M(\mathcal{S}_{\mathcal{W}}, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})\, M(\phi, \mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}_{\mathcal{W}}) M(\mathcal{T}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}_{\mathcal{V}})}$$

onde $M(\mathcal{T}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}_{\mathcal{V}})$ e $M(\mathcal{S}_{\mathcal{W}}, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})$ são as matrizes de mudança da base $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ para a base $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e, respetivamente, da base $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ para a base $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$.

$$\begin{tikzcd}
\phi : \mathcal{V} \arrow[r] & \mathcal{W} \\
{[X]_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}}} \arrow[r, "M(\phi, \mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}_{\mathcal{W}})"] & {[\phi(X)]_{\mathcal{S}_{\mathcal{W}}}} \arrow[d, "M(\mathcal{S}_{\mathcal{W}}, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})"] \\
{[X]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}} \arrow[u, "M(\mathcal{T}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}_{\mathcal{V}})"] \arrow[r, "M(\phi, \mathcal{T}_{\mathcal{V}}, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})"'] & {[\phi(X)]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}}}
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3

Determinar $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ do exemplo 1 usando mudanças de bases.

Como $\phi(1,1)=(2,3,1), \phi(1,0)=(1,2,1)$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}=\big((1,1),(1,0)\big)$, tem-se

$$\phi(X) = [\phi(X)]_{\mathcal{C}_3} = M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)\ [X]_{\mathcal{C}_2} = M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)\ X,$$

sendo

- $M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{C}_3)\ M(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_{\mathcal{V}})$, com
- $M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{C}_3) = \begin{bmatrix} [\phi(1,1)]_{\mathcal{C}_3} & [\phi(1,0)]_{\mathcal{C}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e
- $M(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}) = M(\mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{C}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$

Logo,

$$\phi(X) = M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{C}_3)\ M(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_{\mathcal{V}})\ X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Operadores lineares, matrizes semelhantes e identidade

No caso de um operador linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ consideram-se, geralmente, matrizes relativas a uma única base. Assim, sendo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} M(\mathcal{T}, \mathcal{T}) &= M(\mathcal{T}, \mathcal{S})\, M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{S})\, M(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \\ &= (M(\mathcal{S}, \mathcal{T}))^{-1} M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{S})\, M(\mathcal{S}, \mathcal{T}). \end{aligned}$$

Teorema: Duas matrizes são semelhantes se e só se são matrizes representativas do mesmo operador linear relativas a duas bases diferentes.

A aplicação (operador) identidade de $\mathcal{V}$ é $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$.

- A matriz da aplicação identidade relativa a qualquer base $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade:
  $$M(\mathrm{id}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}, \mathcal{S}) = I.$$
- A matriz da aplicação identidade relativa às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ de $\mathcal{V}$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{S}$ para a base $\mathcal{T}$:
  $$M(\mathrm{id}_{\mathcal{V}}, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = M(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. O núcleo de ϕ é o conjunto

$$\ker(\phi) = \{X \in \mathcal{V} : \ \phi(X) = 0_{\mathcal{W}}\}.$$

A imagem de ϕ é o conjunto

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(X) : \ X \in \mathcal{V}\}$$

de todos os vetores de $\mathcal{W}$ que são imagem de algum vetor de $\mathcal{V}$.

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- $\ker(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
- $\mathrm{im}(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{W}$.

Exercício:
Dada A uma matriz $m \times n$ e ϕ a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $\phi(X) = AX$, mostrar que $\ker(\phi) = \mathcal{N}(A)$ e $\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{C}(A)$.

Exemplo 4

Determinar $\ker(\phi)$ e $\operatorname{im}(\phi)$ para $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y, z) = (x + y, x + y + z).$$

$$\begin{aligned}\ker(\phi) &= \{X \in \mathbb{R}^3 : \ \phi(X) = (0,0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = -x, \ \ z = 0\} \\ &= \{(x, -x, 0) : \ \ x \in X \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\phi) &= \{Y \in \mathbb{R}^2 : \ \phi(X) = Y, \ \ X \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(u, v)) \in \mathbb{R}^2 : \ \phi(x, y, z) = (u, v), \ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(u, v) : \ \ u = x + y, \ \ v = x + y + z, \ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ 1 & 1 & 1 & v \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & v - u \end{bmatrix}$$

Para qualquer $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 2$, ou seja, o sistema $AX = B$ é possível. Portanto, $\operatorname{im}(\phi) = R^2$.

Aplicação linear injetiva, sobrejetiva e isomorfismo

Recordar que uma função $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é

- injetiva se, $\forall\, X_1, X_2 \in \mathcal{V}$,
$$X_1 \neq X_2 \;\Leftrightarrow\; \phi(X_1) \neq \phi(X_2),$$
ou, equivalentemente, $\phi(X_1) = \phi(X_2) \;\Rightarrow\; X_1 = X_2$;
- sobrejetiva se $\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{W}$,
- um isomorfismo se é injetiva e sobrejetiva, isto é, se é bijetiva.

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- ϕ é injetiva $\iff$ $\ker(\phi) = \{0_{\mathcal{V}}\}$ $\iff$ $\dim \ker(\phi) = 0$.
- ϕ é sobrejetiva $\iff$ $\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{W}$ $\iff$ $\dim \mathrm{im}(\phi) = \dim \mathcal{W}$.

A aplicação linear do Exemplo 4 é sobrejetiva ($\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$) mas não é injetiva ($\ker(\phi) \neq \{(0, 0, 0)\}$), logo não é um isomorfismo.

Núcleo e espaço nulo, imagem e espaço das colunas

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear,

$\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$,

$\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$, $\dim \mathcal{W} = m$,

$A = M[\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}]$ (matriz $m \times n$) e

$\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ são, respetivamente, o espaço nulo e o espaço das colunas de A.

Teorema:

- $X \in \ker(\phi) \Leftrightarrow [X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \in \mathcal{N}(A)$;
- $Y \in \mathrm{im}(\phi) \Leftrightarrow [Y]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \in \mathcal{C}(A)$;

Corolário:

- $\dim \ker(\phi) = \dim \mathcal{N}(A) = \mathrm{nul}(A)$;
- $\dim \mathrm{im}(\phi) = \dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A)$;
- ϕ é injetiva $\Leftrightarrow \mathrm{car}(A) = n$;
- ϕ é sobrejetiva $\Leftrightarrow \mathrm{car}(A) = m$.

Teorema das dimensões

Teorema (das dimensões): Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$\dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{V}.$$

Corolário: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear.

- $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W} \quad \Rightarrow \quad \phi$ não é sobrejetiva;
- $\dim \mathcal{V} > \dim \mathcal{W} \quad \Rightarrow \quad \phi$ não é injetiva;
- se $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ então

$$\phi \text{ é injetiva} \iff \phi \text{ é sobrejetiva} \iff \phi \text{ é um isomorfismo};$$

- ϕ é isomorfismo $\Rightarrow \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$.

Isomorfismo e invertibilidade

Teorema: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$. Então,

- ϕ é um isomorfismo $\iff$ $M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})$ é invertível.
- Se ϕ é um isomorfismo, então ϕ é invertível e $\phi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ é uma aplicação linear com

$$M(\phi^{-1}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}) = (M(\phi, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}))^{-1}.$$

Exercício: Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{V}$, com $\dim \mathcal{V} = n$, e

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} &\to \mathbb{R}^n, \\ X &\mapsto [X]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Verifique que ϕ é um isomorfismo e que $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}_n,) = I_n$.